

Un modello numerico per la previsione degli effetti dell'usura in coppie rotoidali con gioco

Alessandro Tasora, Edzeario Prati, Marco Silvestri
Università degli Studi di Parma, ITALY
E-mail: tasora@ied.unipr.it

Keywords: coppie rotoidali, gioco, contatto, previsione usura.

SOMMARIO. Con il presente lavoro s'intende proporre un metodo in grado di prevedere l'usura di coppie rotoidali con gioco per mezzo di una procedura di simulazione numerica. L'andamento dell'usura delle superfici in contatto è diverso da punto a punto poiché i fenomeni d'urto e di scorrimento sono localizzati in zone preferenziali. Si è implementata una procedura di calcolo che simula vari cicli di funzionamento, a regime, del meccanismo in esame: in tal modo si valuta l'effetto cumulativo del lavoro d'attrito delle forze di contatto in un numero discreto di settori delle superfici. Al termine della simulazione è possibile ricavare grafici che riportano l'usura in funzione delle coordinate parametriche delle superfici. I grafici con le previsioni numeriche dell'usura sono stati confrontati con varie misure sperimentali.

1. INTRODUZIONE

Questa memoria descrive un metodo in grado di prevedere l'usura di coppie rotoidali con gioco attraverso l'impiego di una procedura di simulazione numerica.

Precedenti lavori [Colombo,2002][Tasora,2003] hanno messo in luce la possibilità di calcolare, con buon grado di realismo, il moto reciproco delle superfici di una coppia rotoidale con gioco appartenente ad un sistema articolato. I risultati forniti dalle simulazioni numeriche sono stati confrontati con dati sperimentali ottenuti per mezzo di uno specifico banco prova dotato d'accelerometri, fornendo la prova dell'accuratezza del modello numerico [Tasora,2004].

Sulla scorta di tali risultati si è pensato pertanto di perfezionare il programma di simulazione in modo da consentire la previsione dell'andamento dell'usura delle superfici in contatto, diverso da punto a punto poiché i fenomeni d'urto e di scorrimento sono localizzati in zone preferenziali. A tal fine si è implementata una procedura di calcolo che simula vari cicli di funzionamento, a regime, del meccanismo in esame: contemporaneamente si valuta l'effetto cumulativo del lavoro d'attrito delle forze di contatto in un numero discreto di settori delle superfici. Al termine della simulazione è possibile ricavare grafici che riportano, approssimata in forma di *spline*, l'usura in funzione delle coordinate parametriche delle superfici.

I grafici con le previsioni numeriche dell'usura sono stati confrontati con numerose misure sperimentali, grazie ad un quadrilatero motorizzato appositamente costruito in modo da poter smontare facilmente la coppia rotoidale con gioco. Si è valutata l'asportazione di materiale dalle superfici in vari punti, utilizzando sia un micrometro sia un rugosimetro tridimensionale.

2. METODO DI SIMULAZIONE

Il modello impiegato per la simulazione della coppia rotoidale con gioco è descritto in [Tasora,2003]. I metodi solitamente impiegati per lo studio numerico di questo problema [Soong,1990] sono orientati al caso specifico di coppia rotoidale con gioco in quadrilateri articolati. Diversamente da questi, il metodo multibody da noi proposto presenta una generalità più ampia, poiché affronta il problema dal punto di vista delle collisioni e del contatto intermittente fra superfici curve nello spazio. Nel caso qui in esame si tratta delle superfici cilindriche di una coppia rotoidale, ma è possibile estenderne l'impiego anche in caso di meccanismi con più giochi contemporanei, nonché nel caso di giochi fra superfici non perfettamente cilindriche.

La simulazione di contatti fra corpi rigidi comporta la soluzione del problema altamente non-lineare del rilevamento del punto di contatto (solo in casi particolari, quale il contatto fra due cilindri nel presente articolo, la soluzione è rapidamente calcolabile). Altra fonte di complessità è l'integrazione numerica del sistema in presenza d'eventi discontinui, quali i contatti intermittenti fra le superfici delle coppie con gioco. Il problema può essere considerato in termini di inclusioni differenziali nel senso di Filippov, e tal fine si è adottata la formulazione impulsiva di Mirtich che prevede la soluzione di un singolo problema di complementarità lineare per ogni passo d'integrazione [Anitescu,2002]. Con tali accorgimenti è possibile ottenere un'elevata efficienza computazionale.

Il modello di contatto è stato implementato in linguaggio C++ quale componente del software di simulazione multibody CHRONO. Con quest'ultimo si è studiato il caso specifico di un quadrilatero (Fig.1), nel quale la coppia rotoidale con gioco è quella che vincola biella e bilanciere.

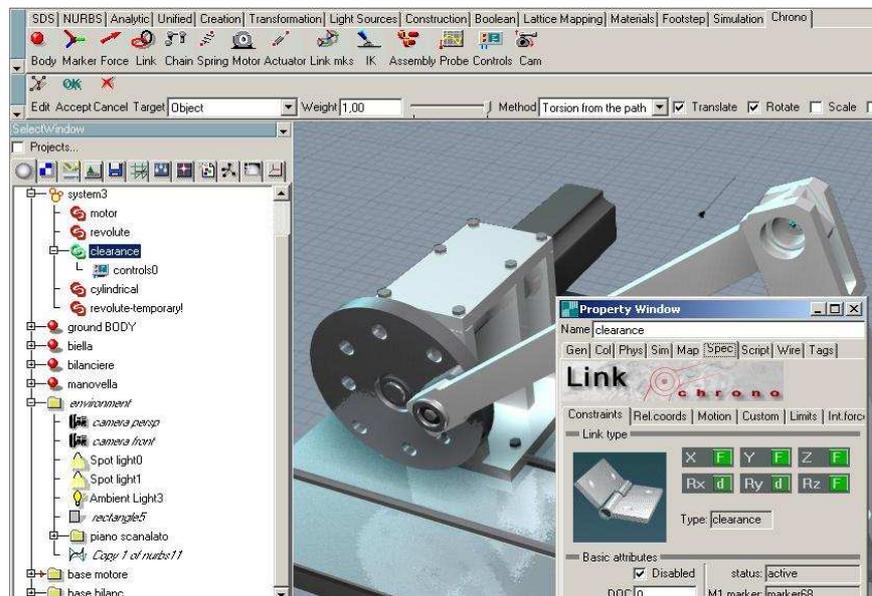


Figura 1. Software di simulazione CHRONO. Coppia con gioco in un quadrilatero articolato.

3. PREVISIONE DELL'USURA

L'algoritmo d'integrazione del programma multibody è in grado di fornire, ad istanti discreti del tempo t , il valore della reazione $\mathbf{P}(t)$ scambiata fra le superfici in contatto nonché la posizione del punto di contatto $\mathbf{G}(t)$. Per effetto dell'elasticità dei corpi, il contatto non sarà puntiforme bensì distribuito su una superficie tanto più estesa quanto più elevata è la reazione scambiata. Inoltre, a parità di reazione, la superficie di contatto varia secondo la curvatura locale delle superfici, pertanto muta di posizione e forma durante la simulazione.

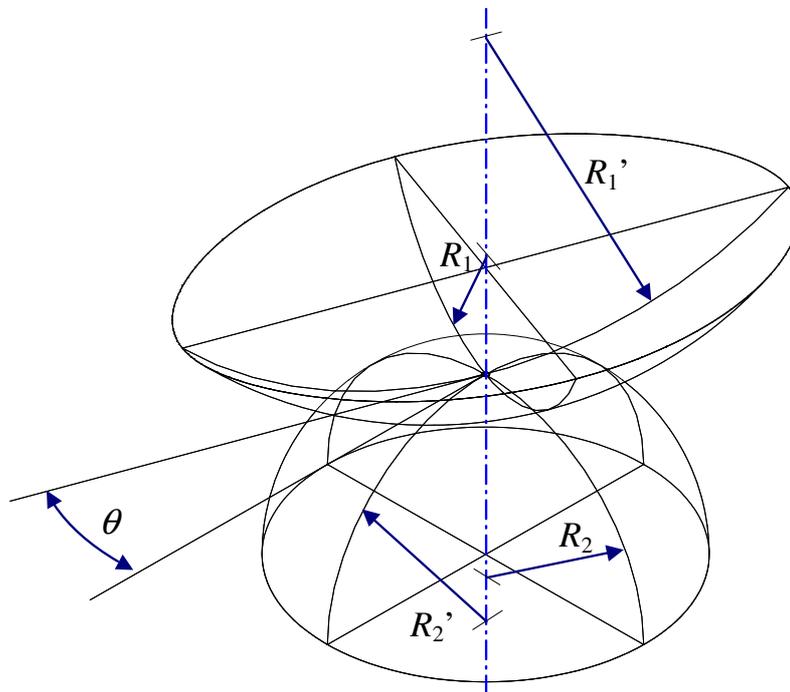


Figura 2. Caso generico di superfici curve in contatto

La distribuzione delle pressioni di contatto e la forma della superficie di contatto potrebbero essere calcolate, con massima generalità, tramite metodi agli elementi finiti. Tuttavia siffatto approccio comporterebbe tempi di calcolo molto elevati pertanto, in modo più approssimativo e comunque accettabile per aree di contatto poco estese, si può fare riferimento alla teoria del contatto di Hertz [Hertz, 1881]. La teoria di Hertz assume le ipotesi di superfici lisce, sforzi trascurabili a distanza elevata dal punto di contatto, sforzi tangenziali nulli o trascurabili nella zona di contatto, sforzi normali nulli al di fuori della zona di contatto.

Nel caso generico di due superfici in contatto, dotate rispettivamente di curvature principali R_1, R_1', R_2, R_2' , per le quali i cerchi oscuratori di R_1 e R_2 giacciono su piani inclinati di un angolo θ come in

Fig.2 , si ottengono le seguenti espressioni per i semiassi a e b dell'area ellittica di contatto e per la pressione massima entro tale area, detto P il modulo della reazione \mathbf{P} :

$$a = c_a \sqrt[3]{\frac{Pm}{n}}, \quad b = c_b \sqrt[3]{\frac{Pm}{n}}, \quad p_{\max} = 1.5 \frac{P}{\pi ab} \quad (1)$$

essendo :

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad m = \frac{4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}}, \quad n = \frac{4}{3} E_c, \quad (2)$$

I coefficienti c_a e c_b sono spesso forniti come tabella di valori precalcolati in funzione di un angolo α , essendo $\alpha = \text{acos}(B/A)$ con:

$$A = \frac{2}{m}, \quad B = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right) \cos 2\theta}, \quad (3)$$

Dal punto di vista dell'implementazione su calcolatore, in alternativa all'impiego della tabella dei coefficienti c_a e c_b , è preferibile il calcolo di a , b e p_{\max} per integrazione numerica degli integrali ellittici presenti nella formulazione originale di Hertz [Deeg, 1992][Tanaka, 2002].

Nell'evento specifico di due cilindri paralleli in contatto, come nel caso della coppia rotoidale con gioco qui in esame, l'area di contatto degenera in un rettangolo di larghezza $2b$ e lunghezza L . In dettaglio si impiegano le seguenti formule:

Raggio relativo:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4)$$

Larghezza b dell'area di contatto rettangolare:

$$b = \sqrt{\frac{4PR_c}{\pi LE_c}} \quad (5)$$

Pressione massima p_{\max} nell'area di contatto:

$$p_{\max} = \frac{2P}{\pi b L} \quad (6)$$

Ad esempio, nel caso di contatto fra due cilindri di lunghezza $L=20\text{mm}$ uno interno all'altro, corrispondenti alle superfici funzionali della coppia rotoidale del quadrilatero in esame, si possono impiegare le formule precedenti cambiando il segno di uno dei due raggi. Si ottengono in tal modo i valori di p_{\max} e b in funzione del gioco e della reazione, come indicato nelle figure 3,4,5,6. I valori sono attendibili per piccole aree di contatto (ovvero quando il gioco non è eccessivamente ridotto).

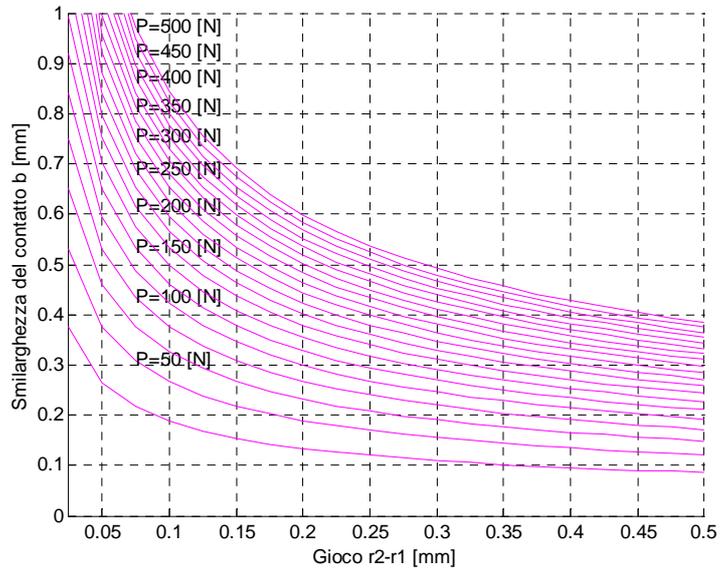


Figura 3. Semiampiezza b della zona di contatto al variare del gioco e della forza di contatto P .

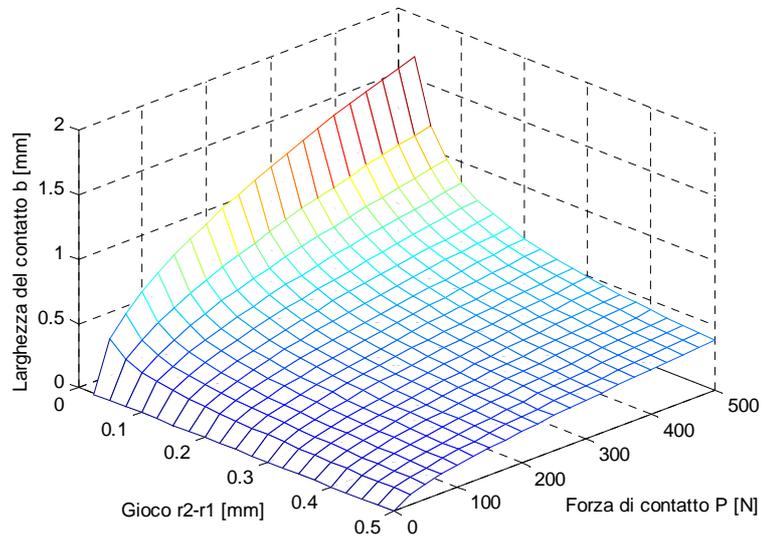


Figura 4. Semiampiezza b della zona di contatto al variare del gioco e della forza di contatto P .

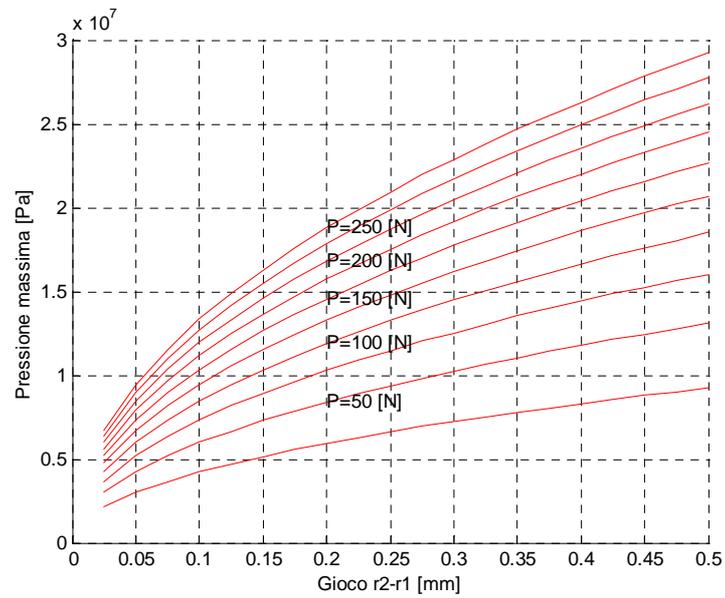


Figura 5. Pressione massima al variare del gioco e della forza di contatto P.

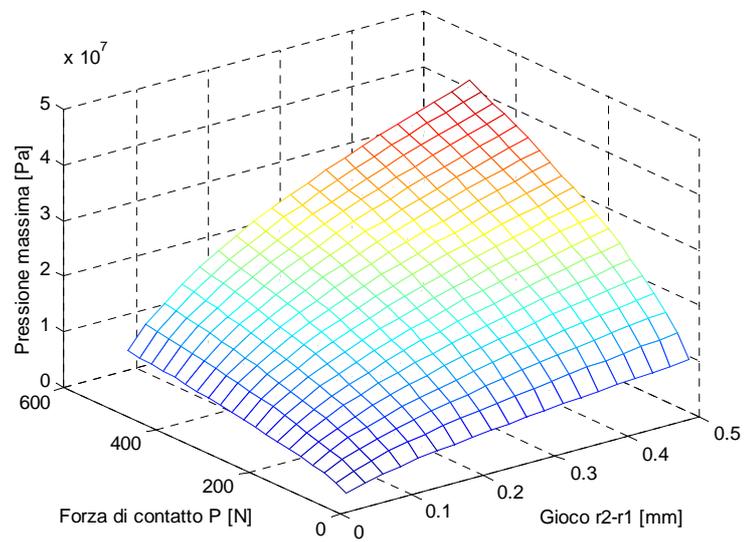


Figura 6. Pressione massima al variare del gioco e della forza di contatto P.

Per generici punti appartenenti all'area di contatto, sotto l'ipotesi di piccole deformazioni, è possibile calcolare anche la velocità di scorrimento locale. Si introducano $\mathbf{B}_{1,0}$ e $\mathbf{B}_{2,0}$, coordinate assolute dei corpi, $[\mathbf{A}_{1,0}]$ e $[\mathbf{A}_{2,0}]$ matrici di rotazione dei sistemi di riferimento locali, $\mathbf{s}_{1,1}$ il punto appartenente alla prima superficie, $\mathbf{s}_{2,2}$ il punto appartenente alla seconda superficie, entrambi espressi nei sistemi di riferimento locali dei rispettivi corpi rigidi, $\boldsymbol{\omega}_{1,1}$ e $\boldsymbol{\omega}_{2,2}$ le velocità angolari. Dato $\mathbf{s}_{2,0} = \mathbf{s}_{1,0}$, l'espressione della velocità di scorrimento, in coordinate assolute, è la seguente:

$$\mathbf{v}_{s,0} = \dot{\mathbf{B}}_{1,0} + [\dot{\mathbf{A}}_{1,0}] \mathbf{s}_{1,1} + [\mathbf{A}_{1,0}] \dot{\mathbf{s}}_{1,1} - \dot{\mathbf{B}}_{2,0} - [\dot{\mathbf{A}}_{2,0}] \mathbf{s}_{2,2} - [\mathbf{A}_{2,0}] \dot{\mathbf{s}}_{2,2}$$

Sviluppando e semplificando:

$$\mathbf{v}_{s,0} = \dot{\mathbf{B}}_{1,0} + [\mathbf{A}_{1,0}] (\boldsymbol{\omega}_{1,1} \wedge \mathbf{s}_{1,1}) - \dot{\mathbf{B}}_{2,0} - [\mathbf{A}_{2,0}] (\boldsymbol{\omega}_{2,2} \wedge \mathbf{s}_{2,2}) \quad (7)$$

In virtù delle espressioni sopra introdotte è possibile calcolare, ad ogni istante e per ogni punto delle superfici in contatto, sia la pressione sia la velocità di scorrimento.

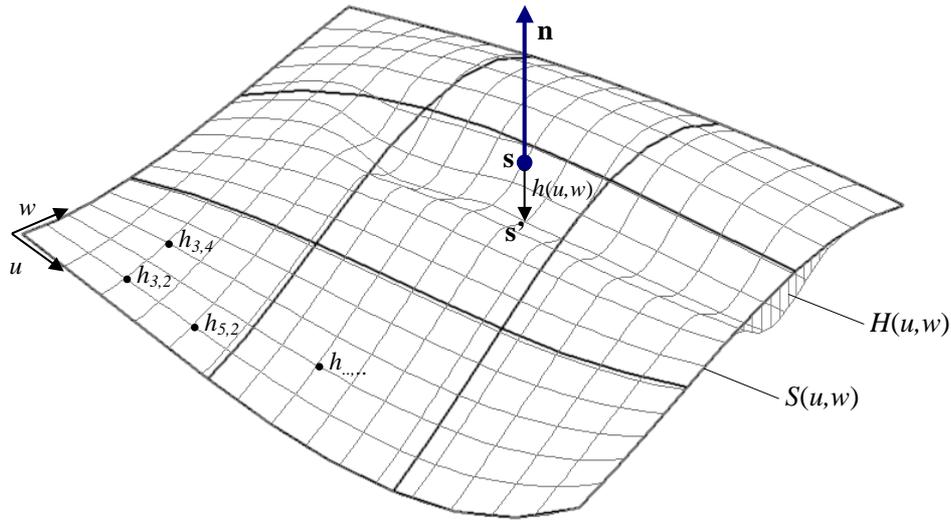


Figura 7. Height-map che registra l'andamento dell'asportazione di materiale superficiale

L'effetto cumulativo dello scorrimento ripetuto su zone preferenziali delle superfici causerà un'asportazione disomogenea del materiale. Si è pensato di registrare il contributo dell'usura per mezzo di una griglia bidimensionale di valori scalari $h_{u,w}$ associati alle superfici, essendo queste ultime espresse in forma di NURBS (b-spline non-uniforme razionali), applicazioni vettoriali S nelle due coordinate parametriche u e w : $S : u \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{s} \in \mathbf{R}^3$. Per superfici di tipo C1, differenziabili in u e w secondo Fréchet, è generalmente calcolabile la normale \mathbf{n} , ovvero $N : u \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{n} \in \mathbf{R}^3$.

Si introduca l'applicazione scalare $H : u \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{R} \rightarrow h \in \mathbf{R}$ al fine di esprimere la variazione di quota della superficie in direzione ortogonale. Tale funzione H può essere ottenuta con interpolazione

cubica (b-spline) o bilineare a partire dai valori $h_{u,w}$. Come mostrato dalla Fig.7, le superfici affette da variazioni di profilo in seguito ad usura saranno espresse dalla somma di un termine globale (forma originale del profilo) ed un termine che indica lo spostamento in direzione ortogonale, quest'ultimo funzione dei valori contenuti nella griglia $h_{u,w}$:

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s}(u, w) + h(u, w) \mathbf{n}(u, w) \quad (8)$$

Il numero di punti di controllo della b-spline S non deve necessariamente coincidere con il numero di punti $h_{u,w}$, anzi si suggerisce di adottare una mesh piuttosto fitta di valori $h_{u,w}$ al fine di ottenere una rappresentazione dettagliata delle zone usurate (al limite l'applicazione scalare H potrebbe essere descritta da una *bitmap* ad alta risoluzione¹).

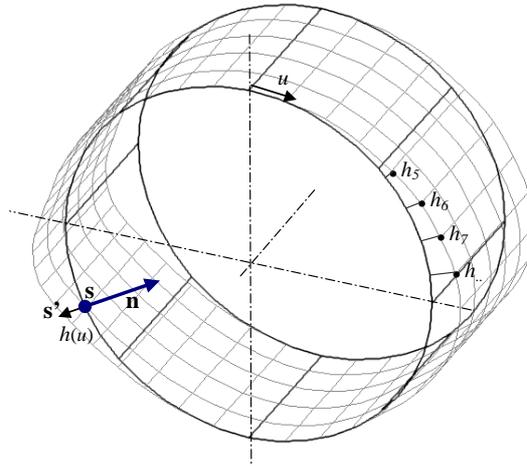


Figura 8. Height-map nel caso della superficie di una coppia rotoidale (rappresentazione con spostamenti $h(u)$ volutamente amplificati per fini illustrativi)

Si assuma l'ipotesi di asportazione di materiale, con abbassamento dh della superficie, proporzionale al lavoro delle forze d'attrito entro una generica superficie di contatto A . Per quanto semplificata ed applicabile al solo caso di contatto non mediato da lubrificanti, tale ipotesi si è dimostrata sufficientemente attendibile in molte delle nostre prove, sia sperimentali sia simulate:

$$\int_A dh dA \propto \int_A p ds dA \quad (8)$$

ovvero

$$dh du dw \propto p v dt du dw \quad (9)$$

¹ Nell'ambito della grafica computazionale, questo genere di bitmap è noto col termine di *height-map* o *bump-map*.

Semplificando ed introducendo una costante di proporzionalità C_h (perlopiù dipendente dalle proprietà costitutive dei materiali in contatto), si ottiene un'espressione che mostra come, con le debite approssimazioni, una porzione di superficie di larghezza $du dw$ subisce in un istante dt un abbassamento dh proporzionale alla pressione ed alla velocità di scorrimento:

$$dh = C_h p v dt \quad (10)$$

Si osservi che $p(u,w)$ è calcolabile tramite la teoria di Hertz (Eq.1-6), e $v(u,w)$ è calcolabile come modulo della $\mathbf{v}_{s,0}$ (Eq.7).

Al fine di un'implementazione su calcolatore, si integra numericamente l'effetto dell'usura su tutta la griglia $h_{u,w}$ tramite sommatorie di contributi $\Delta h_{u,w}$, calcolati ad istanti discreti di tempo Δt , ovvero ad ogni passo di simulazione del meccanismo.

Si riporta l'algoritmo, semplificato ed in forma di pseudocodice, assumendo la presenza di una griglia di $N \times M$ valori $h_{u,w}$ corrispondenti a coordinate parametriche negli intervalli $u \in [0..1]$, $w \in [0..1]$.

Algoritmo 1

```

t=0
while ( t < Tfine )
  Integra equazioni di moto ed aggiorna stato q
  t := t + Δt
  // calcola l'effetto cumulativo dell'usura
  for i=1..N
    for j=1..M
      u=i/N, w= j/M
      du = 1/N, dw = 1/M
      Calcola pressione media p nel dominio s(u,w), s(u,w-dw), s(u-du,w), s(u-du,w-dw);
      if p ≠ 0
        Calcola velocità di scorrimento v nel punto di contatto, o in s(u-du/2,w-dw/2);
        v = ||v||
        Δh = Ch p v Δt
        hi,j := hi,j - Δh
      end
    end
  end
end
end
end

```

L'algoritmo è utilizzabile, previo semplici modifiche, anche nel caso bidimensionale come nell'esempio della coppia rotoidale con gioco: in luogo di una matrice di $N \times M$ valori $h_{u,w}$ è sufficiente far uso di un vettore di N elementi h_u , come mostrato in Fig.8.

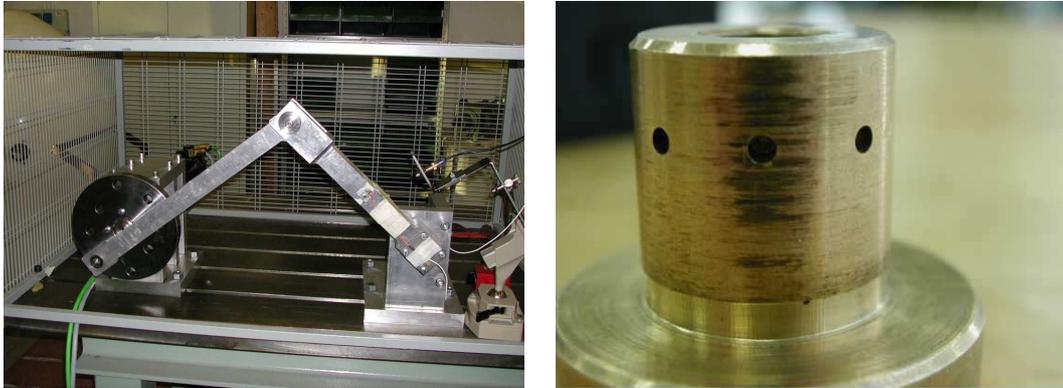


Figura 9. Apparato sperimentale (quadrilatero, a sinistra) e perno usurato (a destra)

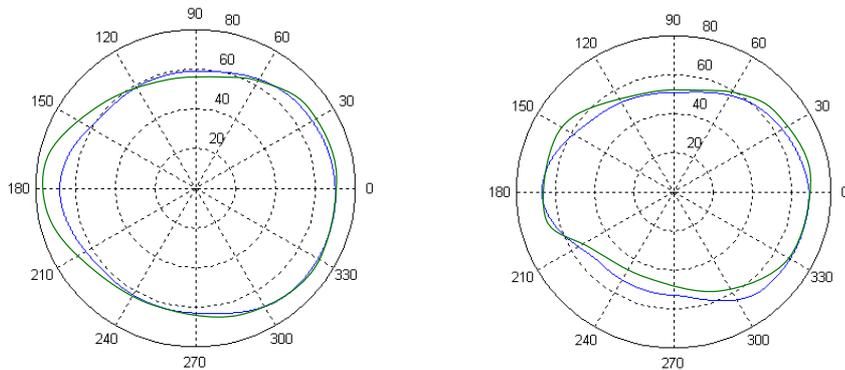


Figura 10. Esempi di misure sperimentali dell'usura della coppia rotoidale del quadrilatero, confrontate con le stime previste dal metodo di simulazione (valori sottratti da $80\mu\text{m}$)

Al fine di ottenere una stima sufficientemente attendibile dell'usura, rappresentata dalla mappa $H : u \in \mathbf{R}, w \in \mathbf{R} \rightarrow h \in \mathbf{R}$, si deve prevedere la simulazione di vari cicli di funzionamento a regime del meccanismo in esame. Ad esempio nel caso del quadrilatero di Fig. 1, proprio a causa del gioco, l'integrale non è periodico e le reazioni scambiate sono diverse ad ogni giro; per tale ragione è necessario simulare almeno quattro/cinque giri prima di avere una stima mediata dell'effetto dell'usura sulle superfici della coppia rotoidale.

4. ESEMPI

In sede sperimentale si è allestito un quadrilatero motorizzato e dotato di sensori: con tale apparato si sono numerose prove d'usura, per coppie rotoidali con diversi valori di gioco e velocità angolari (Fig.9). Sfruttando la possibilità di sostituire agevolmente il perno e la bronzina della coppia con gioco,

si sono misurate le variazioni dei profili delle superfici usurate per mezzo di micrometri e di rugosimetri digitali. I diagrammi polari così ottenuti sono stati confrontati con le stime fornite dal modello numerico (Fig.10), ottenendo una buona corrispondenza.

5. CONCLUSIONI

Il presente lavoro propone una procedura numerica in grado di prevedere l'usura di coppie cinematiche con gioco. Tale metodo, sviluppato per il caso generale di contatto spaziale fra superfici con curvatura arbitraria, è stato applicato al caso specifico di un quadrilatero piano con gioco in una coppia rotoidale.

La procedura di calcolo simula vari cicli di funzionamento, a regime, del meccanismo in esame, valutando l'effetto cumulativo del lavoro d'attrito in un numero discreto di porzioni delle superfici in contatto. L'usura è rappresentata da una B-spline, definita come *height-map* nello spazio parametrico u,w delle superfici, che esprime la rimozione di materiale in modo variabile da punto a punto.

I grafici con le previsioni numeriche dell'usura sono stati confrontati con varie misure sperimentali forniti da un banco appositamente costruito, confermando l'attendibilità del metodo proposto.

References:

- G.Colombo, E.Prati, T.Tripolini, (2002), *Modelling and simulation of clearance in the revolute joints of linkages*, III AIMETA International Tribology Conference (AITC 2002), Vietri sul Mare, Salerno, Italy, 18-20 September 2002.
- Tasora, A., Prati, E. Silvestri, M., (2003), *Implementazione di un modello per contatto intermittente nelle coppie rotoidali con gioco*, AIMETA '03, XVI Congresso Aimeta di Meccanica Teorica e Applicata, Ferrara, Italy, 2003.
- Tasora, A., Prati, E., Silvestri, M., (2004), *Experimental Investigation Of Clearance Effects in a Revolute Joint*, Aimeta Tribology Conference AITC 2004, Roma, Italy, 14-17 September 2004.
- Soong,K., Thompson, B. S. (1990), *A theoretical and experimental investigation of the dynamic response of slider-crank mechanism with radial clearance in the gudgeon-pin joint*, Trans. ASME J. Mech. Transmiss. Autom. Des. 112, 183-189, 1990.
- Hertz, H. (1881), *Ueber die Beruehrung fester elastische Koerper*, J. fuer Reine und Angewandte Mathematik, 92, pp.156-171.
- Deeg, E.W. (1992), *New algorithms for calculating hertzian stresses, deformations, and contact zone parameters*, AMP Journal of Technology, Vol2. November 1992, pp.14-24.
- Tanaka, N. (2001) *New calculation method of Hertz elliptical contact pressure*, Journal of Tribology, vol 123, October 2001, pp.887-889.